

Mathematik

Lernbuch

Zentrale Pruefungen 10. Klasse (MSA)

Mit Erklaerungen und 3 x 2 Beispielen pro Thema

Schwierigkeitsgrade:

Gruen = Leicht

Orange = Mittel

Rot = Schwer

Inhaltsverzeichnis

Mathematik.....	1
Block 1: Zahlen & Terme.....	5
1.1 Rechenregeln (Punkt-vor-Strich, Klammern)	5
1.2 Potenzen und Wurzeln	5
1.3 Terme umformen und zusammenfassen	6
1.4 Zahlen vergleichen und ordnen	6
Block 2: Lineare Gleichungen & Gleichungssysteme.....	7
2.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen.....	7
2.2 Gleichungssysteme (Einsetz- und Additionsverfahren).....	7
2.3 Sachaufgaben mit Gleichungen.....	8
Block 3: Lineare Funktionen.....	9
3.1 Der Funktionsbegriff	9
3.2 Steigung und y-Achsenabschnitt	9
3.3 Graph zeichnen und ablesen.....	10
Block 4: Quadratische Gleichungen	11
4.1 Normalform.....	11
4.2 Die pq-Formel	11
4.3 Diskriminante und Anzahl der Loesungen	12
Block 5: Quadratische Funktionen (Parabeln)	13
5.1 Normalform und Scheitelpunktform.....	13
5.2 Nullstellen	13
5.3 Lage zur x-Achse	14
Block 6: Wachstum & Zerfall	15
6.1 Lineares Wachstum	15
6.2 Exponentielles Wachstum.....	15
6.3 Verdopplungs- und Halbwertszeit.....	16
Block 7: Prozentrechnung & Finanzmathematik	17

7.1 Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz	17
7.2 Rabatt und Mehrwertsteuer	17
7.3 Zinsrechnung	18
Block 8: Geometrie: Flaechen & Koerper	19
8.1 Flaechen: Rechteck, Dreieck, Kreis	19
8.2 Koerper: Quader, Wuerfel, Zylinder, Kegel, Kugel	19
8.3 Einheiten umrechnen	20
Block 9: Dreiecke & Trigonometrie	21
9.1 Satz des Pythagoras	21
9.2 Sinus, Cosinus, Tangens	21
9.3 Anwendungen	22
Block 10: Daten, Statistik & Wahrscheinlichkeit	23
10.1 Diagramme lesen und interpretieren	23
10.2 Mittelwert, Median und Spannweite	23
10.3 Boxplots	24
10.4 Wahrscheinlichkeit	24
10.5 Baumdiagramme und Pfadregeln	25

Block 1: Zahlen & Terme

Dieser Block bildet das Fundament fuer alle weiteren mathematischen Themen. Hier lernst du, wie du mit Zahlen und Buchstaben (Variablen) richtig rechnest.

1.1 Rechenregeln (Punkt-vor-Strich, Klammern)

Erklaerung:Bei mathematischen Ausdruecken gilt eine bestimmte Reihenfolge: Zuerst rechnest du Klammern, dann Potenzen/Wurzeln, dann Punktrechnungen (\cdot und $:$) und zuletzt Strichrechnungen ($+$ und $-$).

Leicht

Aufgabe:Berechne: $3 + 4 \cdot 2$

Loesung:Loesung: Zuerst Multiplikation: $4 \cdot 2 = 8$, dann Addition: $3 + 8 = 11$

Mittel

Aufgabe:Berechne: $(5 + 3) \cdot 2 - 4 \cdot 2$

Loesung:Loesung: Klammer zuerst: $(5+3)=8$, dann Punktrechnungen: $8 \cdot 2=16$ und $4 \cdot 2=8$, dann Strich: $16-8=8$

Schwer

Aufgabe:Berechne: $2 \cdot (3 + 2 \cdot 4) - (15 - 3 \cdot 2)$

Loesung:Loesung: Innere Klammern zuerst: $2 \cdot 4=8$, dann $3+8=11$; zweite Klammer: $3 \cdot 2=6$, dann $15-6=9$; dann $2 \cdot 11=22$; $22-9=13$

1.2 Potenzen und Wurzeln

Erklaerung:Eine Potenz wie 2^3 bedeutet $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Die Wurzel aus 16 ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 16 ergibt, also 4.

Leicht

Aufgabe:Berechne: $3^2 + 4^2$

Loesung:Loesung: $3^2 = 9$ und $4^2 = 16$, also $9 + 16 = 25$

Mittel

Aufgabe:Berechne: Wurzel aus $(25 + 144)$

Loesung:Loesung: Zuerst Klammer: $25 + 144 = 169$, dann Wurzel aus 169 = 13

Schwer

Aufgabe: Vereinfache: $(2^3)^2 \cdot 2^5$

Loesung: Loesung: $(2^3)^2 = 2^6$ (Potenz der Potenz: $3 \cdot 2 = 6$), dann $2^6 \cdot 2^5 = 2^{11}$ (gleiche Basis: Exponenten addieren)

1.3 Terme umformen und zusammenfassen

Erklärung: Gleiche Variablen kannst du zusammenfassen: $3x + 5x = 8x$. Beim Ausmultiplizieren gilt: $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Leicht

Aufgabe: Vereinfache: $5x + 3x - 2x$

Loesung: Loesung: $(5 + 3 - 2)x = 6x$

Mittel

Aufgabe: Vereinfache: $3 \cdot (2x + 4) - 2 \cdot (x - 3)$

Loesung: Loesung: Ausmultiplizieren: $6x + 12 - 2x + 6 = 4x + 18$

Schwer

Aufgabe: Vereinfache: $(2a + 3b)^2 - (2a - 3b)^2$

Loesung: Loesung: Binomische Formeln: $(4a^2 + 12ab + 9b^2) - (4a^2 - 12ab + 9b^2) = 24ab$

1.4 Zahlen vergleichen und ordnen

Erklärung: Auf der Zahlengeraden sind Zahlen weiter rechts groesser. Negative Zahlen sind kleiner als positive. Brueche vergleichst du am besten, indem du sie in Dezimalzahlen umwandelst.

Leicht

Aufgabe: Ordne der Groesse nach (kleinste zuerst): -3, 2, 0, -1

Loesung: Loesung: $-3 < -1 < 0 < 2$

Mittel

Aufgabe: Ordne der Groesse nach: 0,5; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; 0,4

Loesung: Loesung: $\frac{1}{3}$ ungefaehr 0,333; $\frac{2}{5} = 0,4$; also: $\frac{1}{3} < 0,4 = \frac{2}{5} < 0,5$

Schwer

Aufgabe: Zwischen welchen beiden ganzen Zahlen liegt Wurzel aus 50?

Loesung: Loesung: $7^2 = 49$ und $8^2 = 64$, also liegt Wurzel aus 50 zwischen 7 und 8

Block 2: Lineare Gleichungen & Gleichungssysteme

In diesem Block lernst du, wie du Gleichungen loest und Gleichungssysteme mit mehreren Variablen behandelst.

2.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Erklärung: Eine lineare Gleichung hat die Form $ax + b = c$. Du loest sie, indem du x isolierst: Zuerst b subtrahieren, dann durch a teilen.

Leicht

Aufgabe: Loese: $2x + 4 = 10$

Loesung: Loesung: $2x = 10 - 4 = 6$, also $x = 6 : 2 = 3$

Mittel

Aufgabe: Loese: $3 \cdot (x - 2) = 2 \cdot (x + 1)$

Loesung: Loesung: Ausmultiplizieren: $3x - 6 = 2x + 2$; dann $3x - 2x = 2 + 6$; also $x = 8$

Schwer

Aufgabe: Loese: $(2x + 1) : 3 = (x - 2) : 2$

Loesung: Loesung: Kreuzmultiplikation: $2 \cdot (2x+1) = 3 \cdot (x-2)$; $4x+2 = 3x-6$; $x = -8$

2.2 Gleichungssysteme (Einsetz- und Additionsverfahren)

Erklärung: Beim Einsetzverfahren loest du eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt das Ergebnis in die andere Gleichung ein. Beim Additionsverfahren addierst du die Gleichungen so, dass eine Variable wegfaellt.

Leicht

Aufgabe: Loese: I: $x + y = 5$; II: $x - y = 1$

Loesung: Loesung (Addition): I + II: $2x = 6$, also $x = 3$; in I: $3 + y = 5$, also $y = 2$

Mittel

Aufgabe: Loese: I: $2x + 3y = 13$; II: $x - y = 1$

Loesung: Loesung (Einsetzen): Aus II: $x = y + 1$; in I: $2 \cdot (y+1) + 3y = 13$; $5y + 2 = 13$; $y = 2,2$; $x = 3,2$

Schwer

Aufgabe: Loese: I: $3x + 2y = 16$; II: $5x - 3y = 5$

Loesung: Loesung (Addition): I $\cdot 3$: $9x + 6y = 48$; II $\cdot 2$: $10x - 6y = 10$; Addition: $19x = 58$; x ca. 3,05; y ca. 3,42

2.3 Sachaufgaben mit Gleichungen

Erklärung: Bei Sachaufgaben musst du den Text in eine Gleichung uebersetzen. Suche nach ist fuer das Gleichheitszeichen und verwende Variablen fuer die gesuchten Groessen.

Leicht

Aufgabe: Anna ist 3 Jahre aelter als Ben. Zusammen sind sie 25 Jahre alt. Wie alt ist Anna?

Loesung: Loesung: Sei b = Bens Alter, dann Anna = $b + 3$; $b + (b+3) = 25$; $2b = 22$; $b = 11$; Anna = 14

Mittel

Aufgabe: Ein Rechteck ist doppelt so lang wie breit. Der Umfang ist 36 cm. Berechne die Seitenlaengen.

Loesung: Loesung: Sei b = Breite, dann Laenge = $2b$; Umfang = $2b + 2 \cdot (2b) = 6b = 36$; $b = 6$ cm; Laenge = 12 cm

Schwer

Aufgabe: 3 Kugelschreiber und 2 Bleistifte kosten 8,50 Euro. 2 Kugelschreiber und 4 Bleistifte kosten 9,00 Euro. Wie viel kostet ein Kugelschreiber?

Loesung: Loesung: Sei k = Kugelschreiber, b = Bleistift; I: $3k + 2b = 8,5$; II: $2k + 4b = 9$; I $\cdot 2$: $6k + 4b = 17$; minus II: $4k = 8$; $k = 2$ Euro

Block 3: Lineare Funktionen

Lineare Funktionen beschreiben gerade Linien in einem Koordinatensystem. Sie haben die Form $y = mx + b$.

3.1 Der Funktionsbegriff

Erklärung: Eine Funktion ordnet jedem x-Wert genau einen y-Wert zu. Du kannst sie als Tabelle, Graph oder Gleichung darstellen.

Leicht

Aufgabe: Gegeben: $f(x) = 2x + 1$. Berechne $f(3)$.

Loesung: $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$

Mittel

Aufgabe: Erstelle eine Wertetabelle fuer $f(x) = -x + 2$ fuer $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

Loesung: $f(-2)=4, f(-1)=3, f(0)=2, f(1)=1, f(2)=0$

Schwer

Aufgabe: Pruefe, ob der Punkt $P(4 | 11)$ auf dem Graphen von $f(x) = 3x - 1$ liegt.

Loesung: $f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$; ja, der Punkt liegt auf dem Graphen ($y=11$ stimmt)

3.2 Steigung und y-Achsenabschnitt

Erklärung: In $y = mx + b$ ist m die Steigung (wie steil die Gerade ist) und b der y-Achsenabschnitt (wo die Gerade die y-Achse schneidet).

Leicht

Aufgabe: Gib die Steigung und den y-Achsenabschnitt an: $y = 3x - 2$

Loesung: Steigung $m = 3$, y-Achsenabschnitt $b = -2$

Mittel

Aufgabe: Eine Gerade geht durch die Punkte $A(1 | 3)$ und $B(3 | 7)$. Bestimme die Funktionsgleichung.

Loesung: Steigung $m = (7-3):(3-1) = 4:2 = 2$; $y = 2x + b$; Punkt A: $3 = 2 \cdot 1 + b$; $b = 1$; also $y = 2x + 1$

Schwer

Aufgabe: Eine Gerade mit Steigung 3 geht durch den Punkt $P(2 | 5)$. Wo schneidet sie die x-Achse?

Loesung: Loesung: $y = 3x + b$; $5 = 3 \cdot 2 + b$; $b = -1$; Nullstelle: $0 = 3x - 1$; $x = 1/3$

3.3 Graph zeichnen und ablesen

Erklaerung: Zum Zeichnen markierst du den y-Achsenabschnitt und gehst von dort mit der Steigung weiter (1 nach rechts, m nach oben/unten).

Leicht

Aufgabe: Zeichne die Gerade $y = 2x + 1$.

Loesung: Loesung: Starte bei $(0|1)$, dann 1 nach rechts und 2 nach oben zu $(1|3)$, usw.

Mittel

Aufgabe: Lies aus dem Graphen ab: Wo schneidet die Gerade $y = -0,5x + 2$ die x-Achse?

Loesung: Loesung: Bei $y=0$: $0 = -0,5x + 2$; $0,5x = 2$; $x = 4$; Schnittpunkt ist $(4|0)$

Schwer

Aufgabe: Zwei Geraden schneiden sich bei $S(2|4)$. Die erste hat Steigung 2, die zweite Steigung -1. Gib beide Gleichungen an.

Loesung: Loesung: $g1: 4 = 2 \cdot 2 + b1$; $b1 = 0$; also $y = 2x$; $g2: 4 = -1 \cdot 2 + b2$; $b2 = 6$; also $y = -x + 6$

Block 4: Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen enthalten x^2 . Sie koennen 0, 1 oder 2 Loesungen haben.

4.1 Normalform

Erklaerung:Die Normalform ist $x^2 + px + q = 0$. Jede quadratische Gleichung kann in diese Form gebracht werden, indem man durch den Faktor vor x^2 teilt.

Leicht

Aufgabe:Bringe in Normalform: $2x^2 + 6x + 4 = 0$

Loesung:Loesung: Durch 2 teilen: $x^2 + 3x + 2 = 0$

Mittel

Aufgabe:Bringe in Normalform: $3x^2 - 9x = 6$

Loesung:Loesung: -6 auf beiden Seiten: $3x^2 - 9x - 6 = 0$; durch 3: $x^2 - 3x - 2 = 0$

Schwer

Aufgabe:Bringe in Normalform: $(x+1)(x-2) = 4$

Loesung:Loesung: Ausmultiplizieren: $x^2 - 2x + x - 2 = 4$; $x^2 - x - 6 = 0$

4.2 Die pq-Formel

Erklaerung:Fuer $x^2 + px + q = 0$ gilt: $x = -p/2 \pm \text{Wurzel aus } ((p/2)^2 - q)$. Das ist die pq-Formel.

Leicht

Aufgabe:Loese mit pq-Formel: $x^2 - 6x + 5 = 0$

Loesung:Loesung: $p = -6$, $q = 5$; $x = 3 \pm \text{Wurzel aus } (9-5) = 3 \pm 2$; $x_1 = 5$, $x_2 = 1$

Mittel

Aufgabe:Loese mit pq-Formel: $x^2 + 4x - 5 = 0$

Loesung:Loesung: $p = 4$, $q = -5$; $x = -2 \pm \text{Wurzel aus } (4+5) = -2 \pm 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = -5$

Schwer

Aufgabe:Loese mit pq-Formel: $2x^2 - 8x + 6 = 0$

Loesung:Loesung: Durch 2: $x^2 - 4x + 3 = 0$; $p = -4$, $q = 3$; $x = 2 \pm \text{Wurzel aus } (4-3) = 2 \pm 1$; $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

4.3 Diskriminante und Anzahl der Loesungen

Erklaerung: Der Ausdruck $D = (p/2)^2 - q$ heisst Diskriminante. Wenn $D > 0$: 2 Loesungen, $D = 0$: 1 Loesung, $D < 0$: keine Loesung.

Leicht

Aufgabe: Bestimme die Anzahl der Loesungen: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Loesung: Loesung: $D = 4 - 3 = 1 > 0$, also 2 Loesungen

Mittel

Aufgabe: Fuer welche Werte von c hat $x^2 + 2x + c = 0$ genau eine Loesung?

Loesung: Loesung: $D = 1 - c = 0$; $c = 1$

Schwer

Aufgabe: Fuer welche k hat $kx^2 - 4x + 4 = 0$ keine Loesung?

Loesung: Loesung: $D = 4 - 4k < 0$; $4 < 4k$; $k > 1$

Block 5: Quadratische Funktionen (Parabeln)

Quadratische Funktionen haben die Form $y = ax^2 + bx + c$. Ihre Graphen sind Parabeln.

5.1 Normalform und Scheitelpunktform

Erklärung: Die Normalform ist $y = ax^2 + bx + c$. Die Scheitelpunktform ist $y = a(x - d)^2 + e$ mit Scheitelpunkt $S(d|e)$.

Leicht

Aufgabe: Gib den Scheitelpunkt an: $y = (x - 2)^2 + 3$

Loesung: Loesung: Scheitelpunkt ist $S(2|3)$

Mittel

Aufgabe: Wandle um in Scheitelpunktform: $y = x^2 - 6x + 5$

Loesung: Loesung: Quadratische Ergänzung: $y = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$; $S(3|-4)$

Schwer

Aufgabe: Wandle um: $y = 2x^2 - 8x + 6$

Loesung: Loesung: 2 ausklammern: $y = 2(x^2 - 4x) + 6 = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 6 = 2(x-2)^2 - 8 + 6 = 2(x-2)^2 - 2$; $S(2|-2)$

5.2 Nullstellen

Erklärung: Nullstellen sind die x-Werte, wo $y = 0$ ist (also wo die Parabel die x-Achse schneidet).

Leicht

Aufgabe: Bestimme die Nullstellen: $y = x^2 - 9$

Loesung: Loesung: $0 = x^2 - 9$; $x^2 = 9$; $x = \pm 3$

Mittel

Aufgabe: Bestimme die Nullstellen: $y = x^2 - 5x + 6$

Loesung: Loesung: Mit pq-Formel: $x = 2,5 \pm \text{Wurzel aus } (6,25-6) = 2,5 \pm 0,5$; $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

Schwer

Aufgabe: Eine Parabel hat Scheitelpunkt $S(2|-1)$ und geht durch $P(0|3)$. Bestimme die Nullstellen.

Loesung: Loesung: $y = a(x-2)^2 - 1$; $3 = a(0-2)^2 - 1$; $4 = 4a$; $a = 1$; $y = (x-2)^2 - 1$; Nullstellen: $0 = (x-2)^2 - 1$; $(x-2)^2 = 1$; $x = 3$ oder $x = 1$

5.3 Lage zur x-Achse

Erklärung: Wenn $a > 0$, öffnet die Parabel nach oben (hat ein Minimum). Wenn $a < 0$, öffnet sie nach unten (hat ein Maximum).

Leicht

Aufgabe: Hat $y = -x^2 + 4x$ ein Maximum oder Minimum?

Loesung: Loesung: $a = -1 < 0$, also öffnet die Parabel nach unten und hat ein Maximum

Mittel

Aufgabe: Bestimme den Scheitelpunkt und ob es ein Hoch- oder Tiefpunkt ist: $y = -2x^2 + 8x - 5$

Loesung: Loesung: $a = -2 < 0$, also Hochpunkt; $x = -b/(2a) = -8/(-4) = 2$; $y = -8 + 16 - 5 = 3$; H(2|3)

Schwer

Aufgabe: Eine nach oben geöffnete Parabel hat Scheitelpunkt S(1|4). Für welche x ist $y > 0$?

Loesung: Loesung: Da die Parabel nach oben geöffnet ist und der Scheitelpunkt ein Minimum bei $y=4$ ist und nach oben geöffnet, ist y immer > 0 (für alle x)

Block 6: Wachstum & Zerfall

Wachstums- und Zerfallsprozesse werden mit Prozentfaktoren oder Exponentialfunktionen beschrieben.

6.1 Lineares Wachstum

Erklärung: Beim linearen Wachstum wird in jedem Zeitschritt der gleiche Betrag addiert/subtrahiert:
 $y = mx + b$.

Leicht

Aufgabe: Ein Baum wächst jedes Jahr um 20 cm. Er ist jetzt 150 cm hoch. Wie hoch ist er nach 5 Jahren?

Loesung: Loesung: $h = 150 + 20 \cdot 5 = 150 + 100 = 250$ cm

Mittel

Aufgabe: Ein Fahrzeug verbraucht 8 Liter Benzin pro 100 km. Der Tank fasst 60 Liter. Wie weit kommt es?

Loesung: Loesung: Reichweite = $60 : 8 \cdot 100 = 750$ km

Schwer

Aufgabe: Ein Schwimmbecken wird mit 200 Litern pro Minute gefüllt. Es fasst 50.000 Liter und ist zu 20% gefüllt. Wie lange dauert es bis es voll ist?

Loesung: Loesung: Noch zu füllen: 80% von 50000 = 40000 L; Zeit = $40000 : 200 = 200$ Minuten = 3h 20min

6.2 Exponentielles Wachstum

Erklärung: Beim exponentiellen Wachstum wird mit einem Faktor multipliziert: $y = a \cdot q^n$. Der Wachstumsfaktor $q = 1 + p/100$.

Leicht

Aufgabe: Eine Bakterienkultur verdoppelt sich stündlich. Es gibt anfangs 100 Bakterien. Wie viele nach 3 Stunden?

Loesung: Loesung: $q = 2$, $n = 3$; $y = 100 \cdot 2^3 = 100 \cdot 8 = 800$

Mittel

Aufgabe: Ein Kapital wächst um 5% pro Jahr. Wie viel ist 1000 Euro nach 10 Jahren wert?

Loesung: Loesung: $q = 1,05$; $y = 1000 \cdot 1,05^{10}$ ca. $1000 \cdot 1,629 = 1629$ Euro

Schwer

Aufgabe: Eine Stadt hat 50000 Einwohner und wächst um 2% pro Jahr. Nach wie vielen Jahren sind es 60000?

Loesung: Loesung: $60000 = 50000 \cdot 1,02^n$; $1,2 = 1,02^n$; $n = \log(1,2) : \log(1,02)$ ca. 9,2 Jahre

6.3 Verdopplungs- und Halbwertszeit

Erklärung: Die Verdopplungszeit ist die Zeit, in der sich eine Grösse verdoppelt. Die Halbwertszeit ist die Zeit, in der sie auf die Hälfte fällt.

Leicht

Aufgabe: Eine Substanz zerfällt mit Halbwertszeit 10 Jahre. Wie viel ist nach 20 Jahren noch übrig von 100g?

Loesung: Loesung: Nach 10 Jahren: 50g, nach 20 Jahren: 25g

Mittel

Aufgabe: Eine Bakterienkultur verdoppelt sich alle 3 Stunden. Wie lange dauert es, bis sich die Menge verzehnfacht?

Loesung: Loesung: $10 = 2^n$; $n = \log(10) : \log(2)$ ca. 3,32 Verdopplungszeiten; Zeit = $3,32 \cdot 3$ ca. 10 Stunden

Schwer

Aufgabe: Ein Medikament hat Halbwertszeit 4 Stunden. Nach wie vielen Stunden sind noch 10% im Körper?

Loesung: Loesung: $0,1 = 0,5^n$; $n = \log(0,1) : \log(0,5)$ ca. 3,32 Halbwertszeiten; Zeit = $3,32 \cdot 4$ ca. 13,3 Stunden

Block 7: Prozentrechnung & Finanzmathematik

Prozentrechnung ist ueberall im Alltag wichtig - beim Einkaufen, bei Zinsen und bei Rabatten.

7.1 Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

Erklaerung: Grundwert $G = 100\%$, Prozentwert $W = p\%$ von G . Formeln: $W = G \cdot p/100$, $G = W \cdot 100/p$, $p\% = W/G \cdot 100$.

Leicht

Aufgabe: Berechne 20% von 150 Euro.

Loesung: Loesung: $W = 150 \cdot 20/100 = 30$ Euro

Mittel

Aufgabe: 15% eines Betrags sind 45 Euro. Wie hoch ist der Gesamtbetrag?

Loesung: Loesung: $G = 45 \cdot 100/15 = 300$ Euro

Schwer

Aufgabe: Ein Preis wurde von 80 Euro auf 68 Euro reduziert. Um wie viel Prozent?

Loesung: Loesung: Reduktion = 12 Euro; $p = 12/80 \cdot 100 = 15\%$

7.2 Rabatt und Mehrwertsteuer

Erklaerung: Rabatt wird vom Preis abgezogen. Mehrwertsteuer wird hinzugefuegt. Bei 19% MwSt: $\text{Netto} \cdot 1,19 = \text{Brutto}$.

Leicht

Aufgabe: Ein Artikel kostet 50 Euro mit 20% Rabatt. Was zahlst du?

Loesung: Loesung: $50 \cdot 0,8 = 40$ Euro

Mittel

Aufgabe: Ein Artikel kostet brutto 119 Euro (inkl. 19% MwSt). Was kostet er netto?

Loesung: Loesung: $\text{Netto} = 119/1,19 = 100$ Euro

Schwer

Aufgabe: Ein Haendler gibt 15% Rabatt und berechnet dann 19% MwSt. Du zahlst 203,30 Euro. Was war der urspruengliche Preis?

Loesung: Loesung: Nach Rabatt: $203,30/1,19 = 170,84$ Euro; Ursprung: $170,84/0,85 = 200,99$ ca. 201 Euro

7.3 Zinsrechnung

Erklaerung: Jahreszinsen: $Z = K \cdot p/100$. Tageszinsen: $Z = K \cdot p/100 \cdot t/360$. Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot (1 + p/100)^n$.

Leicht

Aufgabe: Wie viel Zinsen bringen 5000 Euro bei 3% pro Jahr?

Loesung: Loesung: $Z = 5000 \cdot 3/100 = 150$ Euro

Mittel

Aufgabe: Ein Kapital von 2000 Euro wird 180 Tage zu 4% verzinst. Wie viel Zinsen gibt es?

Loesung: Loesung: $Z = 2000 \cdot 4/100 \cdot 180/360 = 40$ Euro

Schwer

Aufgabe: 1000 Euro werden 5 Jahre zu 4% mit Zinseszins angelegt. Wie viel ist danach auf dem Konto?

Loesung: Loesung: $K_5 = 1000 \cdot 1,04^5 = 1000 \cdot 1,2167$ ca. 1216,70 Euro

Block 8: Geometrie: Flaechen & Koerper

In der Geometrie berechnest du Flaecheninhalte und Volumina von verschiedenen Formen.

8.1 Flaechen: Rechteck, Dreieck, Kreis

Erklaerung: Rechteck: $A = a \cdot b$; Dreieck: $A = g \cdot h/2$; Kreis: $A = \pi \cdot r^2$, $U = 2 \cdot \pi \cdot r$

Leicht

Aufgabe: Ein Rechteck ist 8 cm lang und 5 cm breit. Berechne den Flaecheninhalt.

Loesung: Loesung: $A = 8 \cdot 5 = 40 \text{ cm}^2$

Mittel

Aufgabe: Ein Kreis hat Durchmesser 10 cm. Berechne Umfang und Flaecheninhalt.

Loesung: Loesung: $r = 5 \text{ cm}$; $U = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10 \cdot \pi \text{ ca. } 31,4 \text{ cm}$; $A = \pi \cdot 25 \text{ ca. } 78,5 \text{ cm}^2$

Schwer

Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck hat Grundseite 12 cm und Schenkel 10 cm. Berechne den Flaecheninhalt.

Loesung: Loesung: Hoehe mit Pythagoras: $h = \text{Wurzel aus } (10^2 - 6^2) = \text{Wurzel aus } 64 = 8 \text{ cm}$; $A = 12 \cdot 8/2 = 48 \text{ cm}^2$

8.2 Koerper: Quader, Wuerfel, Zylinder, Kegel, Kugel

Erklaerung: Quader: $V = a \cdot b \cdot c$; Wuerfel: $V = a^3$; Zylinder: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$; Kegel: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h/3$; Kugel: $V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$

Leicht

Aufgabe: Ein Quader ist 5 cm lang, 4 cm breit und 3 cm hoch. Berechne das Volumen.

Loesung: Loesung: $V = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ cm}^3 = 60 \text{ ml}$

Mittel

Aufgabe: Ein Zylinder hat Radius 4 cm und Hoehe 10 cm. Berechne Volumen und Oberflaeche.

Loesung: Loesung: $V = \pi \cdot 16 \cdot 10 = 160 \cdot \pi \text{ ca. } 502,7 \text{ cm}^3$; $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 32\pi + 80\pi = 112\pi \text{ ca. } 351,9 \text{ cm}^2$

Schwer

Aufgabe: Eine Kugel hat Volumen 1000 cm^3 . Berechne den Radius und die Oberflaeche.

Loesung: Loesung: $1000 = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$; $r^3 = 750/\pi \text{ ca. } 238,7$; $r \text{ ca. } 6,2 \text{ cm}$; $O = 4\pi r^2 \text{ ca. } 483 \text{ cm}^2$

8.3 Einheiten umrechnen

Erklärung: $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$, $1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3$, $1 \text{ Liter} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

Leicht

Aufgabe: Wandle um: $2,5 \text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ Liter

Loesung: Loesung: $2,5 \text{ m}^3 = 2500 \text{ dm}^3 = 2500 \text{ Liter}$

Mittel

Aufgabe: Ein Aquarium ist 80 cm lang, 40 cm breit und 50 cm hoch. Wie viele Liter Wasser fasst es?

Loesung: Loesung: $V = 80 \cdot 40 \cdot 50 = 160000 \text{ cm}^3 = 160 \text{ Liter}$

Schwer

Aufgabe: Ein Schwimmbecken hat 25 m Laenge, 10 m Breite und ist durchschnittlich 1,8 m tief. Wie viele m^3 Wasser enthaelt es bei 90% Fuellung?

Loesung: Loesung: $V = 25 \cdot 10 \cdot 1,8 = 450 \text{ m}^3$; bei 90%: 405 m^3

Block 9: Dreiecke & Trigonometrie

Dreiecke und trigonometrische Funktionen helfen dir, Winkel und Seiten zu berechnen.

9.1 Satz des Pythagoras

Erklärung: Im rechtwinkligen Dreieck gilt: $a^2 + b^2 = c^2$, wobei c die Hypotenuse (längste Seite, gegenüber dem rechten Winkel) ist.

Leicht

Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten 3 cm und 4 cm. Berechne die Hypotenuse.

Loesung: Loesung: $c = \text{Wurzel aus } (3^2 + 4^2) = \text{Wurzel aus } (9 + 16) = \text{Wurzel aus } 25 = 5 \text{ cm}$

Mittel

Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck hat Hypotenuse 13 cm und eine Kathete 5 cm. Berechne die andere Kathete.

Loesung: Loesung: $a = \text{Wurzel aus } (13^2 - 5^2) = \text{Wurzel aus } (169 - 25) = \text{Wurzel aus } 144 = 12 \text{ cm}$

Schwer

Aufgabe: Ist ein Dreieck mit Seiten 7 cm, 24 cm, 25 cm rechtwinklig?

Loesung: Loesung: Prüfe: $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$; Ja, es ist rechtwinklig!

9.2 Sinus, Cosinus, Tangens

Erklärung: Im rechtwinkligen Dreieck: $\sin(\alpha) = \text{Gegenkathete}/\text{Hypotenuse}$, $\cos(\alpha) = \text{Ankathete}/\text{Hypotenuse}$, $\tan(\alpha) = \text{Gegenkathete}/\text{Ankathete}$

Leicht

Aufgabe: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 10 cm und ein Winkel 30 Grad. Berechne die Gegenkathete.

Loesung: Loesung: Gegenkathete $= 10 \cdot \sin(30 \text{ Grad}) = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ cm}$

Mittel

Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten 6 cm und 8 cm. Berechne beide Winkel.

Loesung: Loesung: $\tan(\alpha) = 6/8 = 0,75$; $\alpha = \arctan(0,75)$ ca. 36,9 Grad; $\beta = 90 \text{ Grad} - 36,9 \text{ Grad} = 53,1 \text{ Grad}$

Schwer

Aufgabe: Von einem Punkt 50 m vom Fuss eines Turms entfernt sieht man die Spitze unter einem Winkel von 35 Grad. Wie hoch ist der Turm?

Loesung: Loesung: $\tan(35 \text{ Grad}) = h/50$; $h = 50 \cdot \tan(35 \text{ Grad})$ ca. $50 \cdot 0,7 = 35 \text{ m}$

9.3 Anwendungen

Erklaerung: Mit Trigonometrie kannst du Hoehen, Entfernungen und Winkel in der Praxis berechnen.

Leicht

Aufgabe: Eine Leiter ist 5 m lang und lehnt an einer Wand. Das Fussende ist 3 m von der Wand entfernt. Wie hoch reicht die Leiter?

Loesung: Loesung: $h = \text{Wurzel aus } (5^2 - 3^2) = \text{Wurzel aus } 16 = 4 \text{ m}$

Mittel

Aufgabe: Ein Flugzeug fliegt in 3000 m Hoehe. Unter welchem Winkel (Tiefenwinkel) sieht man einen Punkt am Boden 5000 m entfernt?

Loesung: Loesung: $\tan(\alpha) = 3000/5000 = 0,6$; $\alpha = \arctan(0,6)$ ca. 31 Grad

Schwer

Aufgabe: Zwei Beobachter stehen 100 m voneinander entfernt. Sie sehen einen Ballon unter Winkeln von 45 Grad und 60 Grad. In welcher Hoehe fliegt der Ballon?

Loesung: Loesung: Sei x die Entfernung vom ersten Beobachter: $h = x \cdot \tan(45 \text{ Grad}) = x$; $h = (100 - x) \cdot \tan(60 \text{ Grad}) = (100 - x) \cdot \text{Wurzel } 3$; $x = (100 - x) \cdot \text{Wurzel } 3$; x ca. 63,4 m; h ca. 63,4 m

Block 10: Daten, Statistik & Wahrscheinlichkeit

Statistik hilft dir, Daten zu sammeln, darzustellen und auszuwerten. Wahrscheinlichkeit beschreibt den Zufall.

10.1 Diagramme lesen und interpretieren

Erklärung: Verschiedene Diagramme zeigen Daten unterschiedlich: Balkendiagramme fuer Vergleiche, Kreisdiagramme fuer Anteile, Liniendiagramme fuer Verlaeufe.

Leicht

Aufgabe: In einem Kreisdiagramm hat eine Kategorie einen Winkel von 90 Grad. Welcher Prozentsatz ist das?

Loesung: Loesung: $90 \text{ Grad} / 360 \text{ Grad} = 0,25 = 25\%$

Mittel

Aufgabe: In einer Klasse sind 12 Maedchen und 8 Jungen. Wie gross sind die Winkel im Kreisdiagramm?

Loesung: Loesung: Gesamt 20; Maedchen: $12/20 = 60\% = 216 \text{ Grad}$; Jungen: $8/20 = 40\% = 144 \text{ Grad}$

Schwer

Aufgabe: Ein Balkendiagramm zeigt die Umsaetze von 5 Jahren. Wie berechnest du die durchschnittliche jaehrliche Steigerung?

Loesung: Loesung: Berechne die prozentuale Steigerung fuer jedes Jahr, dann bilde den Durchschnitt dieser Steigerungen

10.2 Mittelwert, Median und Spannweite

Erklärung: Mittelwert = Summe aller Werte / Anzahl; Median = mittlerer Wert (sortiert); Spannweite = Maximum - Minimum

Leicht

Aufgabe: Berechne den Mittelwert: 5, 7, 8, 10

Loesung: Loesung: $(5+7+8+10)/4 = 30/4 = 7,5$

Mittel

Aufgabe:Bestimme Median und Spannweite: 12, 5, 8, 15, 3, 9, 11

Loesung:Loesung: Sortiert: 3, 5, 8, 9, 11, 12, 15; Median = 9 (mittlerer Wert); Spannweite = $15 - 3 = 12$

Schwer

Aufgabe:Die Noten einer Klasse: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Ein Schueler verbessert sich von 5 auf 3. Was aendert sich am Mittelwert und Median?

Loesung:Loesung: Vorher: Mittelwert = $27/9 = 3$, Median = 3; Nachher: Mittelwert = $25/9$ ca. 2,78, Median = 3; nur Mittelwert aendert sich

10.3 Boxplots

Erklaerung:Ein Boxplot zeigt Minimum, unteres Quartil (25%), Median (50%), oberes Quartil (75%) und Maximum.

Leicht

Aufgabe:In einem Boxplot ist der Median bei 10. Was bedeutet das?

Loesung:Loesung: Die Haelfte aller Werte ist kleiner oder gleich 10, die andere Haelfte groesser oder gleich 10

Mittel

Aufgabe:Gegeben: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. Erstelle einen Boxplot.

Loesung:Loesung: Min=2, Max=18, Median=10; untere Haelfte: 2,4,6,8, Median=5; obere Haelfte: 12,14,16,18, Median=15; Box von 5 bis 15

Schwer

Aufgabe:Vergleiche zwei Boxplots: Klasse A hat Box von 3-7, Klasse B von 2-8. Was kannst du ueber die Leistungen sagen?

Loesung:Loesung: Klasse A ist homogener (engere Box), Klasse B heterogener. Klasse A hat hoeheren Median (bessere mittlere Leistung).

10.4 Wahrscheinlichkeit

Erklaerung:Wahrscheinlichkeit $P(E) = \text{Anzahl guenstige Ergebnisse} / \text{Anzahl moegliche Ergebnisse}$. P liegt immer zwischen 0 und 1 (oder 0% und 100%).

Leicht

Aufgabe:Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wuerfel eine 6 zu wuerfeln?

Loesung:Loesung: $P = 1/6$ ca. 16,7%

Mittel

Aufgabe:In einer Urne sind 3 rote, 5 blaue und 2 grüne Kugeln. Wie gross ist $P(\text{rot oder grün})$?

Loesung:Loesung: $P = (3+2)/10 = 5/10 = 0,5 = 50\%$

Schwer

Aufgabe:Bei einem zweifachen Würfelfwurf: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe mindestens 9 ist?

Loesung:Loesung: Guenstig: (3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) = 10; $P = 10/36 = 5/18 \text{ ca. } 27,8\%$

10.5 Baumdiagramme und Pfadregeln

Erklärung:1. Pfadregel: Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren. 2. Pfadregel: Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade addieren.

Leicht

Aufgabe:Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie gross ist $P(\text{zweimal Kopf})$?

Loesung:Loesung: $P = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\%$

Mittel

Aufgabe:In einer Schublade sind 4 weisse und 6 schwarze Socken. Du nimmst zwei ohne Zuruecklegen. Wie gross ist $P(\text{beide weiss})$?

Loesung:Loesung: $P = 4/10 \cdot 3/9 = 12/90 = 2/15 \text{ ca. } 13,3\%$

Schwer

Aufgabe:Ein Test hat 4 Fragen mit je 3 Antwortmöglichkeiten. Wie gross ist $P(\text{mindestens 3 richtig})$ beim Raten?

Loesung:Loesung: $P(3 \text{ richtig}) = 4 \cdot (1/3)^3 \cdot (2/3) = 8/81$; $P(4 \text{ richtig}) = (1/3)^4 = 1/81$; $P(\text{mindestens 3}) = 9/81 = 1/9 \text{ ca. } 11,1\%$