

# Mathematik

Lernbuch

Zentrale Pruefungen 10. Klasse (MSA)

Mit Erklaerungen und 3 x 2 Beispielen pro Thema

**Schwierigkeitsgrade:**

Gruen = Leicht

Orange = Mittel

Rot = Schwer

## Inhaltsverzeichnis

<b>Mathematik .....</b>	<b>1</b>
<b>Block 1: Zahlen &amp; Terme .....</b>	<b>5</b>
1.1 Rechenregeln (Punkt-vor-Strich, Klammern) .....	5
1.2 Potenzen und Wurzeln .....	5
1.3 Terme umformen und zusammenfassen .....	6
1.4 Zahlen vergleichen und ordnen .....	6
<b>Block 2: Lineare Gleichungen &amp; Gleichungssysteme.....</b>	<b>7</b>
2.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen.....	7
2.2 Gleichungssysteme (Einsetz- und Additionsverfahren).....	7
2.3 Sachaufgaben mit Gleichungen.....	8
<b>Block 3: Lineare Funktionen.....</b>	<b>9</b>
3.1 Der Funktionsbegriff .....	9
3.2 Steigung und y-Achsenabschnitt .....	9
3.3 Graph zeichnen und ablesen.....	10
<b>Block 4: Quadratische Gleichungen.....</b>	<b>11</b>
4.1 Normalform.....	11
4.2 Die pq-Formel .....	11
4.3 Diskriminante und Anzahl der Lösungen .....	12
<b>Block 5: Quadratische Funktionen (Parabeln) .....</b>	<b>13</b>
5.1 Normalform und Scheitelpunktform.....	13
5.2 Nullstellen .....	13
5.3 Lage zur x-Achse.....	14
<b>Block 6: Wachstum &amp; Zerfall .....</b>	<b>15</b>
6.1 Lineares Wachstum .....	15
6.2 Exponentielles Wachstum .....	15
6.3 Verdopplungs- und Halbwertszeit.....	16
<b>Block 7: Prozentrechnung &amp; Finanzmathematik .....</b>	<b>17</b>

7.1 Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz .....	17
7.2 Rabatt und Mehrwertsteuer .....	17
7.3 Zinsrechnung.....	18
<b>Block 8: Geometrie: Flaechen &amp; Koerper.....</b>	<b>19</b>
8.1 Flaechen: Rechteck, Dreieck, Kreis.....	19
8.2 Koerper: Quader, Wuerfel, Zylinder, Kegel, Kugel .....	19
8.3 Einheiten umrechnen.....	20
<b>Block 9: Dreiecke &amp; Trigonometrie.....</b>	<b>21</b>
9.1 Satz des Pythagoras .....	21
9.2 Sinus, Cosinus, Tangens.....	21
9.3 Anwendungen .....	22
<b>Block 10: Daten, Statistik &amp; Wahrscheinlichkeit.....</b>	<b>23</b>
10.1 Diagramme lesen und interpretieren.....	23
10.2 Mittelwert, Median und Spannweite .....	23
10.3 Boxplots.....	24
10.4 Wahrscheinlichkeit.....	24
10.5 Baumdiagramme und Pfadregeln .....	25



# Block 1: Zahlen & Terme

Dieser Block bildet das Fundament fuer alle weiteren mathematischen Themen. Hier lernst du, wie du mit Zahlen und Buchstaben (Variablen) richtig rechnest.

## 1.1 Rechenregeln (Punkt-vor-Strich, Klammern)

**Erklaerung:**Bei mathematischen Ausdruecken gilt eine bestimmte Reihenfolge: Zuerst rechnest du Klammern, dann Potenzen/Wurzeln, dann Punktrechnungen ( $\cdot$  und  $:$ ) und zuletzt Strichrechnungen (+ und -).

**Leicht**

**Aufgabe:**Berechne:  $3 + 4 \cdot 2$

**Loesung:**Loesung: Zuerst Multiplikation:  $4 \cdot 2 = 8$ , dann Addition:  $3 + 8 = 11$

**Mittel**

**Aufgabe:**Berechne:  $(5 + 3) \cdot 2 - 4 \cdot 2$

**Loesung:**Loesung: Klammer zuerst:  $(5+3)=8$ , dann Punktrechnungen:  $8 \cdot 2=16$  und  $4 \cdot 2=8$ , dann Strich:  $16-8=8$

**Schwer**

**Aufgabe:**Berechne:  $2 \cdot (3 + 2 \cdot 4) - (15 - 3 \cdot 2)$

**Loesung:**Loesung: Innere Klammern zuerst:  $2 \cdot 4=8$ , dann  $3+8=11$ ; zweite Klammer:  $3 \cdot 2=6$ , dann  $15-6=9$ ; dann  $2 \cdot 11=22$ ;  $22-9=13$

## 1.2 Potenzen und Wurzeln

**Erklaerung:**Eine Potenz wie  $2^3$  bedeutet  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ . Die Wurzel aus 16 ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 16 ergibt, also 4.

**Leicht**

**Aufgabe:**Berechne:  $3^2 + 4^2$

**Loesung:**Loesung:  $3^2 = 9$  und  $4^2 = 16$ , also  $9 + 16 = 25$

**Mittel**

**Aufgabe:**Berechne: Wurzel aus  $(25 + 144)$

**Loesung:**Loesung: Zuerst Klammer:  $25 + 144 = 169$ , dann Wurzel aus  $169 = 13$

**Schwer**

**Aufgabe:** Vereinfache:  $(2^3)^2 \cdot 2^5$

**Loesung:** Loesung:  $(2^3)^2 = 2^6$  (Potenz der Potenz:  $3 \cdot 2 = 6$ ), dann  $2^6 \cdot 2^5 = 2^{11}$  (gleiche Basis: Exponenten addieren)

## 1.3 Terme umformen und zusammenfassen

**Erklaerung:** Gleiche Variablen kannst du zusammenfassen:  $3x + 5x = 8x$ . Beim Ausmultiplizieren gilt:  $a \cdot (b + c) = ab + ac$ .

**Leicht**

**Aufgabe:** Vereinfache:  $5x + 3x - 2x$

**Loesung:** Loesung:  $(5 + 3 - 2)x = 6x$

**Mittel**

**Aufgabe:** Vereinfache:  $3 \cdot (2x + 4) - 2 \cdot (x - 3)$

**Loesung:** Loesung: Ausmultiplizieren:  $6x + 12 - 2x + 6 = 4x + 18$

**Schwer**

**Aufgabe:** Vereinfache:  $(2a + 3b)^2 - (2a - 3b)^2$

**Loesung:** Loesung: Binomische Formeln:  $(4a^2 + 12ab + 9b^2) - (4a^2 - 12ab + 9b^2) = 24ab$

## 1.4 Zahlen vergleichen und ordnen

**Erklaerung:** Auf der Zahlengeraden sind Zahlen weiter rechts grösser. Negative Zahlen sind kleiner als positive. Brüche vergleichst du am besten, indem du sie in Dezimalzahlen umwandelst.

**Leicht**

**Aufgabe:** Ordne die Grössen nach (kleinste zuerst):  $-3, 2, 0, -1$

**Loesung:** Loesung:  $-3 < -1 < 0 < 2$

**Mittel**

**Aufgabe:** Ordne die Grössen nach:  $0,5; 1/3; 2/5; 0,4$

**Loesung:** Loesung:  $1/3$  ungefähr  $0,333; 2/5 = 0,4$ ; also:  $1/3 < 0,4 = 2/5 < 0,5$

**Schwer**

**Aufgabe:** Zwischen welchen beiden ganzen Zahlen liegt Wurzel aus 50?

**Loesung:** Loesung:  $7^2 = 49$  und  $8^2 = 64$ , also liegt Wurzel aus 50 zwischen 7 und 8

# Block 2: Lineare Gleichungen & Gleichungssysteme

In diesem Block lernst du, wie du Gleichungen löst und Gleichungssysteme mit mehreren Variablen behandelst.

## 2.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen

**Erklärung:** Eine lineare Gleichung hat die Form  $ax + b = c$ . Du löst sie, indem du  $x$  isolierst: Zuerst  $b$  subtrahieren, dann durch  $a$  teilen.

**Leicht**

**Aufgabe:** Löse:  $2x + 4 = 10$

**Loesung:** Lösung:  $2x = 10 - 4 = 6$ , also  $x = 6 : 2 = 3$

**Mittel**

**Aufgabe:** Löse:  $3 \cdot (x - 2) = 2 \cdot (x + 1)$

**Loesung:** Lösung: Ausmultiplizieren:  $3x - 6 = 2x + 2$ ; dann  $3x - 2x = 2 + 6$ ; also  $x = 8$

**Schwer**

**Aufgabe:** Löse:  $(2x + 1) : 3 = (x - 2) : 2$

**Loesung:** Lösung: Kreuzmultiplikation:  $2 \cdot (2x+1) = 3 \cdot (x-2)$ ;  $4x+2 = 3x-6$ ;  $x = -8$

## 2.2 Gleichungssysteme (Einsetz- und Additionsverfahren)

**Erklärung:** Beim Einsetzverfahren löst du eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt das Ergebnis in die andere Gleichung ein. Beim Additionsverfahren addierst du die Gleichungen so, dass eine Variable wegfällt.

**Leicht**

**Aufgabe:** Löse: I:  $x + y = 5$ ; II:  $x - y = 1$

**Loesung:** Lösung (Addition): I + II:  $2x = 6$ , also  $x = 3$ ; in I:  $3 + y = 5$ , also  $y = 2$

**Mittel**

**Aufgabe:** Löse: I:  $2x + 3y = 13$ ; II:  $x - y = 1$

**Loesung:** Lösung (Einsetzen): Aus II:  $x = y + 1$ ; in I:  $2 \cdot (y+1) + 3y = 13$ ;  $5y + 2 = 13$ ;  $y = 2,2$ ;  $x = 3,2$

**Schwer**

**Aufgabe:**Loese: I:  $3x + 2y = 16$ ; II:  $5x - 3y = 5$

**Loesung:**Loesung (Addition): I · 3:  $9x+6y=48$ ; II · 2:  $10x-6y=10$ ; Addition:  $19x=58$ ;  $x$  ca. 3,05;  $y$  ca. 3,42

## 2.3 Sachaufgaben mit Gleichungen

**Erklaerung:**Bei Sachaufgaben musst du den Text in eine Gleichung uebersetzen. Suche nach ist fuer das Gleichheitszeichen und verwende Variablen fuer die gesuchten Groessen.

### Leicht

**Aufgabe:**Anna ist 3 Jahre aelter als Ben. Zusammen sind sie 25 Jahre alt. Wie alt ist Anna?

**Loesung:**Loesung: Sei  $b$  = Bens Alter, dann Anna =  $b + 3$ ;  $b + (b+3) = 25$ ;  $2b = 22$ ;  $b = 11$ ; Anna = 14

### Mittel

**Aufgabe:**Ein Rechteck ist doppelt so lang wie breit. Der Umfang ist 36 cm. Berechne die Seitenlaengen.

**Loesung:**Loesung: Sei  $b$  = Breite, dann Laenge =  $2b$ ; Umfang =  $2b + 2 \cdot (2b) = 6b = 36$ ;  $b = 6$  cm; Laenge = 12 cm

### Schwer

**Aufgabe:**3 Kugelschreiber und 2 Bleistifte kosten 8,50 Euro. 2 Kugelschreiber und 4 Bleistifte kosten 9,00 Euro. Wie viel kostet ein Kugelschreiber?

**Loesung:**Loesung: Sei  $k$  = Kugelschreiber,  $b$  = Bleistift; I:  $3k + 2b = 8,5$ ; II:  $2k + 4b = 9$ ; I · 2:  $6k+4b=17$ ; minus II:  $4k=8$ ;  $k=2$  Euro

# Block 3: Lineare Funktionen

Lineare Funktionen beschreiben gerade Linien in einem Koordinatensystem. Sie haben die Form  $y = mx + b$ .

## 3.1 Der Funktionsbegriff

**Erklärung:** Eine Funktion ordnet jedem  $x$ -Wert genau einen  $y$ -Wert zu. Du kannst sie als Tabelle, Graph oder Gleichung darstellen.

### Leicht

**Aufgabe:** Gegeben:  $f(x) = 2x + 1$ . Berechne  $f(3)$ .

**Loesung:** Loesung:  $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$

### Mittel

**Aufgabe:** Erstelle eine Wertetabelle fuer  $f(x) = -x + 2$  fuer  $x = -2, -1, 0, 1, 2$ .

**Loesung:** Loesung:  $f(-2)=4, f(-1)=3, f(0)=2, f(1)=1, f(2)=0$

### Schwer

**Aufgabe:** Pruefe, ob der Punkt  $P(4|11)$  auf dem Graphen von  $f(x) = 3x - 1$  liegt.

**Loesung:** Loesung:  $f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$ ; ja, der Punkt liegt auf dem Graphen ( $y=11$  stimmt)

## 3.2 Steigung und y-Achsenabschnitt

**Erklärung:** In  $y = mx + b$  ist  $m$  die Steigung (wie steil die Gerade ist) und  $b$  der  $y$ -Achsenabschnitt (wo die Gerade die  $y$ -Achse schneidet).

### Leicht

**Aufgabe:** Gib die Steigung und den  $y$ -Achsenabschnitt an:  $y = 3x - 2$

**Loesung:** Loesung: Steigung  $m = 3$ ,  $y$ -Achsenabschnitt  $b = -2$

### Mittel

**Aufgabe:** Eine Gerade geht durch die Punkte  $A(1|3)$  und  $B(3|7)$ . Bestimme die Funktionsgleichung.

**Loesung:** Loesung: Steigung  $m = (7-3):(3-1) = 4:2 = 2$ ;  $y = 2x + b$ ; Punkt A:  $3 = 2 \cdot 1 + b$ ;  $b = 1$ ; also  $y = 2x + 1$

### Schwer

**Aufgabe:** Eine Gerade mit Steigung 3 geht durch den Punkt  $P(2|5)$ . Wo schneidet sie die  $x$ -Achse?

**Loesung:** Loesung:  $y = 3x + b$ ;  $5 = 3 \cdot 2 + b$ ;  $b = -1$ ; Nullstelle:  $0 = 3x - 1$ ;  $x = 1/3$

### 3.3 Graph zeichnen und ablesen

**Erklaerung:** Zum Zeichnen markierst du den y-Achsenabschnitt und gehst von dort mit der Steigung weiter (1 nach rechts, m nach oben/unten).

**Leicht**

**Aufgabe:** Zeichne die Gerade  $y = 2x + 1$ .

**Loesung:** Loesung: Starte bei  $(0|1)$ , dann 1 nach rechts und 2 nach oben zu  $(1|3)$ , usw.

**Mittel**

**Aufgabe:** Lies aus dem Graphen ab: Wo schneidet die Gerade  $y = -0,5x + 2$  die x-Achse?

**Loesung:** Loesung: Bei  $y=0$ :  $0 = -0,5x + 2$ ;  $0,5x = 2$ ;  $x = 4$ ; Schnittpunkt ist  $(4|0)$

**Schwer**

**Aufgabe:** Zwei Geraden schneiden sich bei  $S(2|4)$ . Die erste hat Steigung 2, die zweite Steigung -1. Gib beide Gleichungen an.

**Loesung:** Loesung: g1:  $4 = 2 \cdot 2 + b_1$ ;  $b_1 = 0$ ; also  $y = 2x$ ; g2:  $4 = -1 \cdot 2 + b_2$ ;  $b_2 = 6$ ; also  $y = -x + 6$

# Block 4: Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen enthalten  $x^2$ . Sie können 0, 1 oder 2 Lösungen haben.

## 4.1 Normalform

**Erklärung:** Die Normalform ist  $x^2 + px + q = 0$ . Jede quadratische Gleichung kann in diese Form gebracht werden, indem man durch den Faktor vor  $x^2$  teilt.

**Leicht**

**Aufgabe:** Bringe in Normalform:  $2x^2 + 6x + 4 = 0$

**Loesung:** Loesung: Durch 2 teilen:  $x^2 + 3x + 2 = 0$

**Mittel**

**Aufgabe:** Bringe in Normalform:  $3x^2 - 9x = 6$

**Loesung:** Loesung: -6 auf beiden Seiten:  $3x^2 - 9x - 6 = 0$ ; durch 3:  $x^2 - 3x - 2 = 0$

**Schwer**

**Aufgabe:** Bringe in Normalform:  $(x+1)(x-2) = 4$

**Loesung:** Loesung: Ausmultiplizieren:  $x^2 - 2x + x - 2 = 4$ ;  $x^2 - x - 6 = 0$

## 4.2 Die pq-Formel

**Erklärung:** Für  $x^2 + px + q = 0$  gilt:  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ . Das ist die pq-Formel.

**Leicht**

**Aufgabe:** Löse mit pq-Formel:  $x^2 - 6x + 5 = 0$

**Loesung:** Loesung:  $p = -6$ ,  $q = 5$ ;  $x = 3 \pm \sqrt{(-6)^2 - 5} = 3 \pm \sqrt{36 - 5} = 3 \pm \sqrt{31}$ ;  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 1$

**Mittel**

**Aufgabe:** Löse mit pq-Formel:  $x^2 + 4x - 5 = 0$

**Loesung:** Loesung:  $p = 4$ ,  $q = -5$ ;  $x = -2 \pm \sqrt{(4)^2 - (-5)} = -2 \pm \sqrt{16 + 5} = -2 \pm \sqrt{21}$ ;  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -5$

**Schwer**

**Aufgabe:** Löse mit pq-Formel:  $2x^2 - 8x + 6 = 0$

**Loesung:** Loesung: Durch 2:  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;  $p = -4$ ,  $q = 3$ ;  $x = 2 \pm \sqrt{(-4)^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{16 - 3} = 2 \pm \sqrt{13}$ ;  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 1$

## 4.3 Diskriminante und Anzahl der Loesungen

**Erklaerung:**Der Ausdruck  $D = (p/2)^2 - q$  heisst Diskriminante. Wenn  $D > 0$ : 2 Loesungen,  $D = 0$ : 1 Loesung,  $D < 0$ : keine Loesung.

### Leicht

**Aufgabe:**Bestimme die Anzahl der Loesungen:  $x^2 - 4x + 3 = 0$

**Loesung:**Loesung:  $D = 4 - 3 = 1 > 0$ , also 2 Loesungen

### Mittel

**Aufgabe:**Fuer welche Werte von  $c$  hat  $x^2 + 2x + c = 0$  genau eine Loesung?

**Loesung:**Loesung:  $D = 1 - c = 0$ ;  $c = 1$

### Schwer

**Aufgabe:**Fuer welche  $k$  hat  $kx^2 - 4x + 4 = 0$  keine Loesung?

**Loesung:**Loesung:  $D = 4 - 4k < 0$ ;  $4 < 4k$ ;  $k > 1$

# Block 5: Quadratische Funktionen (Parabeln)

Quadratische Funktionen haben die Form  $y = ax^2 + bx + c$ . Ihre Graphen sind Parabeln.

## 5.1 Normalform und Scheitelpunktform

**Erklärung:** Die Normalform ist  $y = ax^2 + bx + c$ . Die Scheitelpunktform ist  $y = a(x - d)^2 + e$  mit Scheitelpunkt  $S(d | e)$ .

**Leicht**

**Aufgabe:** Gib den Scheitelpunkt an:  $y = (x - 2)^2 + 3$

**Loesung:** Loesung: Scheitelpunkt ist  $S(2 | 3)$

**Mittel**

**Aufgabe:** Wandle um in Scheitelpunktform:  $y = x^2 - 6x + 5$

**Loesung:** Loesung: Quadratische Ergänzung:  $y = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4; S(3 | -4)$

**Schwer**

**Aufgabe:** Wandle um:  $y = 2x^2 - 8x + 6$

**Loesung:** Loesung: 2 ausklammern:  $y = 2(x^2 - 4x) + 6 = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 6 = 2(x-2)^2 - 8 + 6 = 2(x-2)^2 - 2; S(2 | -2)$

## 5.2 Nullstellen

**Erklärung:** Nullstellen sind die x-Werte, wo  $y = 0$  ist (also wo die Parabel die x-Achse schneidet).

**Leicht**

**Aufgabe:** Bestimme die Nullstellen:  $y = x^2 - 9$

**Loesung:** Loesung:  $0 = x^2 - 9; x^2 = 9; x = +- 3$

**Mittel**

**Aufgabe:** Bestimme die Nullstellen:  $y = x^2 - 5x + 6$

**Loesung:** Loesung: Mit pq-Formel:  $x = 2,5 \pm \sqrt{6,25-6} = 2,5 \pm 0,5; x_1 = 3, x_2 = 2$

**Schwer**

**Aufgabe:** Eine Parabel hat Scheitelpunkt  $S(2 | -1)$  und geht durch  $P(0 | 3)$ . Bestimme die Nullstellen.

**Loesung:** Loesung:  $y = a(x-2)^2 - 1; 3 = a(0-2)^2 - 1; 4 = 4a; a = 1; y = (x-2)^2 - 1$ ; Nullstellen:  $0 = (x-2)^2 - 1; (x-2)^2 = 1; x = 3 \text{ oder } x = 1$

## 5.3 Lage zur x-Achse

**Erklärung:** Wenn  $a > 0$ , öffnet die Parabel nach oben (hat ein Minimum). Wenn  $a < 0$ , öffnet sie nach unten (hat ein Maximum).

### Leicht

**Aufgabe:** Hat  $y = -x^2 + 4x$  ein Maximum oder Minimum?

**Loesung:** Loesung:  $a = -1 < 0$ , also öffnet die Parabel nach unten und hat ein Maximum

### Mittel

**Aufgabe:** Bestimme den Scheitelpunkt und ob es ein Hoch- oder Tiefpunkt ist:  $y = -2x^2 + 8x - 5$

**Loesung:** Loesung:  $a = -2 < 0$ , also Hochpunkt;  $x = -b/(2a) = -8/(-4) = 2$ ;  $y = -8 + 16 - 5 = 3$ ;  $H(2|3)$

### Schwer

**Aufgabe:** Eine nach oben geöffnete Parabel hat Scheitelpunkt  $S(1|4)$ . Für welche  $x$  ist  $y > 0$ ?

**Loesung:** Loesung: Da die Parabel nach oben geöffnet ist und der Scheitelpunkt ein Minimum bei  $y=4$  ist und nach oben geöffnet, ist  $y$  immer  $> 0$  (für alle  $x$ )

# Block 6: Wachstum & Zerfall

Wachstums- und Zerfallsprozesse werden mit Prozentfaktoren oder Exponentialfunktionen beschrieben.

## 6.1 Lineares Wachstum

**Erklaerung:** Beim linearen Wachstum wird in jedem Zeitschritt der gleiche Betrag addiert/subtrahiert:  
 $y = mx + b$ .

### Leicht

**Aufgabe:** Ein Baum waechst jedes Jahr um 20 cm. Er ist jetzt 150 cm hoch. Wie hoch ist er nach 5 Jahren?

**Loesung:** Loesung:  $h = 150 + 20 \cdot 5 = 150 + 100 = 250$  cm

### Mittel

**Aufgabe:** Ein Fahrzeug verbraucht 8 Liter Benzin pro 100 km. Der Tank fasst 60 Liter. Wie weit kommt es?

**Loesung:** Loesung: Reichweite =  $60:8 \cdot 100 = 750$  km

### Schwer

**Aufgabe:** Ein Schwimmbecken wird mit 200 Litern pro Minute gefuellt. Es fasst 50.000 Liter und ist zu 20% gefuellt. Wie lange dauert es bis es voll ist?

**Loesung:** Loesung: Noch zu fuellen: 80% von 50000 = 40000 L; Zeit =  $40000:200 = 200$  Minuten = 3h 20min

## 6.2 Exponentielles Wachstum

**Erklaerung:** Beim exponentiellen Wachstum wird mit einem Faktor multipliziert:  $y = a \cdot q^n$ . Der Wachstumsfaktor  $q = 1 + p/100$ .

### Leicht

**Aufgabe:** Eine Bakterienkultur verdoppelt sich stuendlich. Es gibt anfangs 100 Bakterien. Wie viele nach 3 Stunden?

**Loesung:** Loesung:  $q = 2$ ,  $n = 3$ ;  $y = 100 \cdot 2^3 = 100 \cdot 8 = 800$

### Mittel

**Aufgabe:** Ein Kapital waechst um 5% pro Jahr. Wie viel ist 1000 Euro nach 10 Jahren wert?

**Loesung:** Loesung:  $q = 1,05$ ;  $y = 1000 \cdot 1,05^{10}$  ca.  $1000 \cdot 1,629 = 1629$  Euro

**Schwer**

**Aufgabe:**Eine Stadt hat 50000 Einwohner und waechst um 2% pro Jahr. Nach wie vielen Jahren sind es 60000?

**Loesung:**Loesung:  $60000 = 50000 \cdot 1,02^n$ ;  $1,2 = 1,02^n$ ;  $n = \log(1,2):\log(1,02)$  ca. 9,2 Jahre

## 6.3 Verdopplungs- und Halbwertszeit

**Erklaerung:**Die Verdopplungszeit ist die Zeit, in der sich eine Groesse verdoppelt. Die Halbwertszeit ist die Zeit, in der sie auf die Haelfte faellt.

**Leicht**

**Aufgabe:**Eine Substanz zerfaellt mit Halbwertszeit 10 Jahre. Wie viel ist nach 20 Jahren noch uebrig von 100g?

**Loesung:**Loesung: Nach 10 Jahren: 50g, nach 20 Jahren: 25g

**Mittel**

**Aufgabe:**Eine Bakterienkultur verdoppelt sich alle 3 Stunden. Wie lange dauert es, bis sich die Menge verzehnfacht?

**Loesung:**Loesung:  $10 = 2^n$ ;  $n = \log(10):\log(2)$  ca. 3,32 Verdopplungszeiten; Zeit =  $3,32 \cdot 3$  ca. 10 Stunden

**Schwer**

**Aufgabe:**Ein Medikament hat Halbwertszeit 4 Stunden. Nach wie vielen Stunden sind noch 10% im Koerper?

**Loesung:**Loesung:  $0,1 = 0,5^n$ ;  $n = \log(0,1):\log(0,5)$  ca. 3,32 Halbwertszeiten; Zeit =  $3,32 \cdot 4$  ca. 13,3 Stunden

# Block 7: Prozentrechnung & Finanzmathematik

Prozentrechnung ist ueberall im Alltag wichtig - beim Einkaufen, bei Zinsen und bei Rabatten.

## 7.1 Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

**Erklaerung:**Grundwert  $G = 100\%$ , Prozentwert  $W = p\%$  von  $G$ . Formeln:  $W = G \cdot p/100$ ,  $G = W \cdot 100/p$ ,  $p\% = W/G \cdot 100$ .

### Leicht

**Aufgabe:**Berechne 20% von 150 Euro.

**Loesung:**Loesung:  $W = 150 \cdot 20/100 = 30$  Euro

### Mittel

**Aufgabe:**15% eines Betrags sind 45 Euro. Wie hoch ist der Gesamtbetrag?

**Loesung:**Loesung:  $G = 45 \cdot 100/15 = 300$  Euro

### Schwer

**Aufgabe:**Ein Preis wurde von 80 Euro auf 68 Euro reduziert. Um wie viel Prozent?

**Loesung:**Loesung: Reduktion = 12 Euro;  $p = 12/80 \cdot 100 = 15\%$

## 7.2 Rabatt und Mehrwertsteuer

**Erklaerung:**Rabatt wird vom Preis abgezogen. Mehrwertsteuer wird hinzugefuegt. Bei 19% MwSt:  
Netto  $\cdot 1,19$  = Brutto.

### Leicht

**Aufgabe:**Ein Artikel kostet 50 Euro mit 20% Rabatt. Was zahlst du?

**Loesung:**Loesung:  $50 \cdot 0,8 = 40$  Euro

### Mittel

**Aufgabe:**Ein Artikel kostet brutto 119 Euro (inkl. 19% MwSt). Was kostet er netto?

**Loesung:**Loesung: Netto =  $119/1,19 = 100$  Euro

### Schwer

**Aufgabe:**Ein Haendler gibt 15% Rabatt und berechnet dann 19% MwSt. Du zahlst 203,30 Euro.

Was war der urspruengliche Preis?

**Loesung:** Loesung: Nach Rabatt:  $203,30 / 1,19 = 170,84$  Euro; Ursprung:  $170,84 / 0,85 = 200,99$  ca.  
201 Euro

## 7.3 Zinsrechnung

**Erklaerung:** Jahreszinsen:  $Z = K \cdot p / 100$ . Tageszinsen:  $Z = K \cdot p / 100 \cdot t / 360$ . Zinseszins:  $K_n = K_0 \cdot (1 + p / 100)^n$ .

**Leicht**

**Aufgabe:** Wie viel Zinsen bringen 5000 Euro bei 3% pro Jahr?

**Loesung:** Loesung:  $Z = 5000 \cdot 3 / 100 = 150$  Euro

**Mittel**

**Aufgabe:** Ein Kapital von 2000 Euro wird 180 Tage zu 4% verzinst. Wie viel Zinsen gibt es?

**Loesung:** Loesung:  $Z = 2000 \cdot 4 / 100 \cdot 180 / 360 = 40$  Euro

**Schwer**

**Aufgabe:** 1000 Euro werden 5 Jahre zu 4% mit Zinseszins angelegt. Wie viel ist danach auf dem Konto?

**Loesung:** Loesung:  $K_5 = 1000 \cdot 1,04^5 = 1000 \cdot 1,2167$  ca. 1216,70 Euro

# Block 8: Geometrie: Flaechen & Koerper

In der Geometrie berechnest du Flaecheninhalte und Volumina von verschiedenen Formen.

## 8.1 Flaechen: Rechteck, Dreieck, Kreis

**Erklaerung:**Rechteck:  $A = a \cdot b$ ; Dreieck:  $A = g \cdot h/2$ ; Kreis:  $A = \pi \cdot r^2$ ,  $U = 2 \cdot \pi \cdot r$

**Leicht**

**Aufgabe:**Ein Rechteck ist 8 cm lang und 5 cm breit. Berechne den Flaecheninhalt.

**Loesung:**Loesung:  $A = 8 \cdot 5 = 40 \text{ cm}^2$

**Mittel**

**Aufgabe:**Ein Kreis hat Durchmesser 10 cm. Berechne Umfang und Flaecheninhalt.

**Loesung:**Loesung:  $r = 5 \text{ cm}$ ;  $U = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10 \cdot \pi \text{ ca. } 31,4 \text{ cm}$ ;  $A = \pi \cdot 25 \text{ ca. } 78,5 \text{ cm}^2$

**Schwer**

**Aufgabe:**Ein gleichschenkliges Dreieck hat Grundseite 12 cm und Schenkel 10 cm. Berechne den Flaecheninhalt.

**Loesung:**Loesung: Hoehe mit Pythagoras:  $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$ ;  $A = 12 \cdot 8/2 = 48 \text{ cm}^2$

## 8.2 Koerper: Quader, Wuerfel, Zylinder, Kegel, Kugel

**Erklaerung:**Quader:  $V = a \cdot b \cdot c$ ; Wuerfel:  $V = a^3$ ; Zylinder:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ ; Kegel:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h/3$ ; Kugel:  $V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$

**Leicht**

**Aufgabe:**Ein Quader ist 5 cm lang, 4 cm breit und 3 cm hoch. Berechne das Volumen.

**Loesung:**Loesung:  $V = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ cm}^3 = 60 \text{ ml}$

**Mittel**

**Aufgabe:**Ein Zylinder hat Radius 4 cm und Hoehe 10 cm. Berechne Volumen und Oberflaeche.

**Loesung:**Loesung:  $V = \pi \cdot 16 \cdot 10 = 160 \cdot \pi \text{ ca. } 502,7 \text{ cm}^3$ ;  $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 32\pi + 80\pi = 112\pi \text{ ca. } 351,9 \text{ cm}^2$

**Schwer**

**Aufgabe:**Eine Kugel hat Volumen 1000 cm<sup>3</sup>. Berechne den Radius und die Oberflaeche.

**Loesung:**Loesung:  $1000 = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$ ;  $r^3 = 750/\pi \text{ ca. } 238,7$ ;  $r \text{ ca. } 6,2 \text{ cm}$ ;  $O = 4\pi r^2 \text{ ca. } 483 \text{ cm}^2$

## 8.3 Einheiten umrechnen

**Erklärung:**  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ ,  $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$ ,  $1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3$ ,  $1 \text{ Liter} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

### Leicht

**Aufgabe:** Wandle um:  $2,5 \text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}}$  Liter

**Loesung:** Loesung:  $2,5 \text{ m}^3 = 2500 \text{ dm}^3 = 2500 \text{ Liter}$

### Mittel

**Aufgabe:** Ein Aquarium ist 80 cm lang, 40 cm breit und 50 cm hoch. Wie viele Liter Wasser fasst es?

**Loesung:** Loesung:  $V = 80 \cdot 40 \cdot 50 = 160000 \text{ cm}^3 = 160 \text{ Liter}$

### Schwer

**Aufgabe:** Ein Schwimmbecken hat 25 m Laenge, 10 m Breite und ist durchschnittlich 1,8 m tief. Wie viele  $\text{m}^3$  Wasser enthaelt es bei 90% Fuellung?

**Loesung:** Loesung:  $V = 25 \cdot 10 \cdot 1,8 = 450 \text{ m}^3$ ; bei 90%:  $405 \text{ m}^3$

# Block 9: Dreiecke & Trigonometrie

Dreiecke und trigonometrische Funktionen helfen dir, Winkel und Seiten zu berechnen.

## 9.1 Satz des Pythagoras

**Erklaerung:** Im rechtwinkligen Dreieck gilt:  $a^2 + b^2 = c^2$ , wobei  $c$  die Hypotenuse (laengste Seite, gegueber dem rechten Winkel) ist.

### Leicht

**Aufgabe:** Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten 3 cm und 4 cm. Berechne die Hypotenuse.

**Loesung:** Loesung:  $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$

### Mittel

**Aufgabe:** Ein rechtwinkliges Dreieck hat Hypotenuse 13 cm und eine Kathete 5 cm. Berechne die andere Kathete.

**Loesung:** Loesung:  $a = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$

### Schwer

**Aufgabe:** Ist ein Dreieck mit Seiten 7 cm, 24 cm, 25 cm rechtwinklig?

**Loesung:** Loesung: Pruefe:  $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$ ; Ja, es ist rechtwinklig!

## 9.2 Sinus, Cosinus, Tangens

**Erklaerung:** Im rechtwinkligen Dreieck:  $\sin(\alpha) = \text{Gegenkathete}/\text{Hypotenuse}$ ,  $\cos(\alpha) = \text{Ankathete}/\text{Hypotenuse}$ ,  $\tan(\alpha) = \text{Gegenkathete}/\text{Ankathete}$

### Leicht

**Aufgabe:** In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 10 cm und ein Winkel 30 Grad. Berechne die Gegenkathete.

**Loesung:** Loesung: Gegenkathete =  $10 \cdot \sin(30 \text{ Grad}) = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ cm}$

### Mittel

**Aufgabe:** Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten 6 cm und 8 cm. Berechne beide Winkel.

**Loesung:** Loesung:  $\tan(\alpha) = 6/8 = 0,75$ ;  $\alpha = \arctan(0,75)$  ca. 36,9 Grad;  $\beta = 90 \text{ Grad} - 36,9 \text{ Grad} = 53,1 \text{ Grad}$

### Schwer

**Aufgabe:** Von einem Punkt 50 m vom Fuss eines Turms entfernt sieht man die Spitze unter einem Winkel von 35 Grad. Wie hoch ist der Turm?

**Loesung:** Loesung:  $\tan(35 \text{ Grad}) = h/50$ ;  $h = 50 \cdot \tan(35 \text{ Grad})$  ca.  $50 \cdot 0,7 = 35 \text{ m}$

## 9.3 Anwendungen

**Erklaerung:** Mit Trigonometrie kannst du Hoehen, Entfernnungen und Winkel in der Praxis berechnen.

### Leicht

**Aufgabe:** Eine Leiter ist 5 m lang und lehnt an einer Wand. Das Fussende ist 3 m von der Wand entfernt. Wie hoch reicht die Leiter?

**Loesung:** Loesung:  $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ m}$

### Mittel

**Aufgabe:** Ein Flugzeug fliegt in 3000 m Hoehe. Unter welchem Winkel (Tiefenwinkel) sieht man einen Punkt am Boden 5000 m entfernt?

**Loesung:** Loesung:  $\tan(\alpha) = 3000/5000 = 0,6$ ;  $\alpha = \arctan(0,6)$  ca. 31 Grad

### Schwer

**Aufgabe:** Zwei Beobachter stehen 100 m voneinander entfernt. Sie sehen einen Ballon unter Winkeln von 45 Grad und 60 Grad. In welcher Hoehe fliegt der Ballon?

**Loesung:** Loesung: Sei  $x$  die Entfernung vom ersten Beobachter:  $h = x \cdot \tan(45 \text{ Grad}) = x$ ;  $h = (100-x) \cdot \tan(60 \text{ Grad}) = (100-x) \cdot \sqrt{3}$ ;  $x = (100-x) \cdot \sqrt{3}$ ;  $x \approx 63,4 \text{ m}$ ;  $h \approx 63,4 \text{ m}$

# Block 10: Daten, Statistik & Wahrscheinlichkeit

Statistik hilft dir, Daten zu sammeln, darzustellen und auszuwerten. Wahrscheinlichkeit beschreibt den Zufall.

## 10.1 Diagramme lesen und interpretieren

**Erklaerung:** Verschiedene Diagramme zeigen Daten unterschiedlich: Balkendiagramme fuer Vergleiche, Kreisdiagramme fuer Anteile, Liniendiagramme fuer Verlaeufe.

### Leicht

**Aufgabe:** In einem Kreisdiagramm hat eine Kategorie einen Winkel von 90 Grad. Welcher Prozentsatz ist das?

**Loesung:** Loesung:  $90 \text{ Grad} / 360 \text{ Grad} = 0,25 = 25\%$

### Mittel

**Aufgabe:** In einer Klasse sind 12 Maedchen und 8 Jungen. Wie gross sind die Winkel im Kreisdiagramm?

**Loesung:** Loesung: Gesamt 20; Maedchen:  $12/20 = 60\% = 216 \text{ Grad}$ ; Jungen:  $8/20 = 40\% = 144 \text{ Grad}$

### Schwer

**Aufgabe:** Ein Balkendiagramm zeigt die Umsaetze von 5 Jahren. Wie berechnest du die durchschnittliche jaehrliche Steigerung?

**Loesung:** Loesung: Berechne die prozentuale Steigerung fuer jedes Jahr, dann bilde den Durchschnitt dieser Steigerungen

## 10.2 Mittelwert, Median und Spannweite

**Erklaerung:** Mittelwert = Summe aller Werte / Anzahl; Median = mittlerer Wert (sortiert); Spannweite = Maximum - Minimum

### Leicht

**Aufgabe:** Berechne den Mittelwert: 5, 7, 8, 10

**Loesung:** Loesung:  $(5+7+8+10)/4 = 30/4 = 7,5$

### Mittel

**Aufgabe:** Bestimme Median und Spannweite: 12, 5, 8, 15, 3, 9, 11

**Loesung:** Loesung: Sortiert: 3, 5, 8, 9, 11, 12, 15; Median = 9 (mittlerer Wert); Spannweite = 15 - 3 = 12

**Schwer**

**Aufgabe:** Die Noten einer Klasse: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Ein Schueler verbessert sich von 5 auf 3. Was aendert sich am Mittelwert und Median?

**Loesung:** Loesung: Vorher: Mittelwert =  $27/9 = 3$ , Median = 3; Nachher: Mittelwert =  $25/9 \text{ ca. } 2,78$ , Median = 3; nur Mittelwert aendert sich

## 10.3 Boxplots

**Erklaerung:** Ein Boxplot zeigt Minimum, unteres Quartil (25%), Median (50%), oberes Quartil (75%) und Maximum.

**Leicht**

**Aufgabe:** In einem Boxplot ist der Median bei 10. Was bedeutet das?

**Loesung:** Loesung: Die Haelfte aller Werte ist kleiner oder gleich 10, die andere Haelfte groesser oder gleich 10

**Mittel**

**Aufgabe:** Gegeben: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. Erstelle einen Boxplot.

**Loesung:** Loesung: Min=2, Max=18, Median=10; untere Haelfte: 2,4,6,8, Median=5; obere Haelfte: 12,14,16,18, Median=15; Box von 5 bis 15

**Schwer**

**Aufgabe:** Vergleiche zwei Boxplots: Klasse A hat Box von 3-7, Klasse B von 2-8. Was kannst du ueber die Leistungen sagen?

**Loesung:** Loesung: Klasse A ist homogener (engere Box), Klasse B heterogener. Klasse A hat hoeheren Median (bessere mittlere Leistung).

## 10.4 Wahrscheinlichkeit

**Erklaerung:** Wahrscheinlichkeit  $P(E) = \text{Anzahl guenstige Ergebnisse} / \text{Anzahl moegliche Ergebnisse}$ . P liegt immer zwischen 0 und 1 (oder 0% und 100%).

**Leicht**

**Aufgabe:** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wuerfel eine 6 zu wuerfeln?

**Loesung:** Loesung:  $P = 1/6 \text{ ca. } 16,7\%$

**Mittel**

**Aufgabe:** In einer Urne sind 3 rote, 5 blaue und 2 grüne Kugeln. Wie gross ist  $P(\text{rot oder gruen})$ ?

**Loesung:** Loesung:  $P = (3+2)/10 = 5/10 = 0,5 = 50\%$

**Schwer**

**Aufgabe:** Bei einem zweifachen Wuerfelwurf: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe mindestens 9 ist?

**Loesung:** Loesung: Guenstig: (3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) = 10;  $P = 10/36 = 5/18$  ca. 27,8%

## 10.5 Baumdiagramme und Pfadregeln

**Erklaerung:** 1. Pfadregel: Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren. 2. Pfadregel: Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade addieren.

**Leicht**

**Aufgabe:** Eine Muenze wird zweimal geworfen. Wie gross ist  $P(\text{zweimal Kopf})$ ?

**Loesung:** Loesung:  $P = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\%$

**Mittel**

**Aufgabe:** In einer Schublade sind 4 weisse und 6 schwarze Socken. Du nimmst zwei ohne Zuruecklegen. Wie gross ist  $P(\text{beide weiss})$ ?

**Loesung:** Loesung:  $P = 4/10 \cdot 3/9 = 12/90 = 2/15$  ca. 13,3%

**Schwer**

**Aufgabe:** Ein Test hat 4 Fragen mit je 3 Antwortmoeglichkeiten. Wie gross ist  $P(\text{mindestens 3 richtig})$  beim Raten?

**Loesung:** Loesung:  $P(3 \text{ richtig}) = 4 \cdot (1/3)^3 \cdot (2/3) = 8/81$ ;  $P(4 \text{ richtig}) = (1/3)^4 = 1/81$ ;  $P(\text{mindestens 3}) = 9/81 = 1/9$  ca. 11,1%